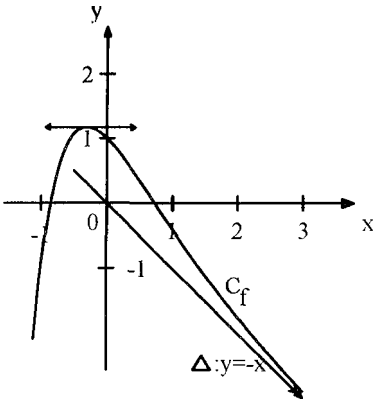

B-1) $\varphi'(x)=-g'(x)-(-g'(x)+(b-x)g''(x))+2[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-x)$

$= -(b-x)g''(x)+2[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-x).$

2)a- $\star\varphi(a) =g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-a)^2$

$=g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-[g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)]=0.$

$\star\ \varphi(b) =g(b)-g(b)-(b-b)g'(b)-[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-b)^2=0$

b- Comme g est continue sur [a, b] et g' est continue sur [a, b] alors φ est continue sur [a, b] (1)

Aussi g est dérivable sur]a,b[et g' est dérivable sur]a,b[alors φ est dérivable sur]a,b[(2)

(1) et (2) ⇒ il existe un réel c ∈]a,b[tel que $\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c)$

⇔il existe un réel c ∈]a,b[tel que $\varphi'(c)=0$ car $\varphi(b) = \varphi(a)=0$

3) $\varphi'(c)=0 \Leftrightarrow -(b-c)g''(c)+2[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-c)=0$

$$\Leftrightarrow -g''(c)+2\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}=g''(c)$$

$$\Leftrightarrow g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)=\frac{(b-a)^2}{2}g''(c).$$

C-1) • Pour tout x ∈]Log 2, 1[on a, $h'(x)=f'(x)<0$

• ∀x ∈]Log 2, 1[on a $h''(x)=f''(x)=[-2e^{-x}+2e^{-2x}-1]'$

$= 2e^{-x}-4e^{-2x}=2e^{-x}(1-2e^{-x})$

$\text{Log}2 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < -\text{Log}2 = \text{Log}\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{-1} < e^{-x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\frac{1}{2} < -2e^{-x} < -2e^{-1}$